

國立彰化師範大學數學系 104 學年度大學甄選
個人申請入學第二階段指定項目甄試考試

第一試

※填充題：(請將答案依題號填入答案卷的空格內)。每一題分數為 10 分。

1. 求複數 $\frac{(1+\sqrt{3}i)^{10}}{(\sqrt{3}-i)^9}$ 的實部。_____。
2. 已知 $\sqrt{5} \doteq 2.23607$ ，則以四捨五入估計 $\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2+\sqrt{7-3\sqrt{5}}}}$ 的值至小數點以下第 4 位為_____。
3. 一袋中有編號 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 等 10 個球，甲、乙、丙三人依序自袋中各取一球，取後均放回，得到編號依序為 a, b, c 的三個球，求發生 $a \geq b \geq c$ 的機率。_____。
4. 設 \vec{a}, \vec{b} 為兩非零向量，且 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ，若 \vec{a}, \vec{b} 兩向量的夾角為 θ ，求 $\cos\theta$ 的值。_____。
5. 解對數不等式 $\log_x(x+1) - \log_{\frac{1}{x}}(1-x) > 2$ 。_____。
6. 若 m, n 是大於 1 的整數，且 $m^n - 1$ 是質數，求 m 的可能值。_____。
7. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 10 & 9 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ ，已知 $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，且對任意非負整數 n ，均滿足 $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ 。求最小整數 n ，使得 $x_n > x_{n+1}$ 。_____。
8. 設 A, B, C 為一橢圓上的三個點，其中 \overline{AB} 為此橢圓之長軸，且 $\overline{AB} = 4, \overline{BC} = \sqrt{3}, \angle CAB = \frac{\pi}{6}$ ，求此橢圓焦點與中心的距離。_____。
9. 三角形 ABC 中，已知 $\overline{BC} = 4$ ，且 $\sin^2 B + \sin^2 C - \sin B \sin C = \sin^2 A$ ，求三角形 ABC 的最大面積。_____。
10. 設 a, b, c 均為正整數，且滿足 $a^2 + b^2 = \sqrt{c^2 + 21}$ ，求數對 (a, b, c) 。_____。

國立彰化師範大學數學系 104 學年度大學甄選
個人申請入學第二階段指定項目甄試考試

第二試

注意事項：請將完整的計算證明步驟依題號寫在答案卷上。每一題分數為 20 分。

1. 證明對所有正整數 $n \geq 2$, $\sqrt[n]{n} < 2 - \frac{1}{n}$ 成立。

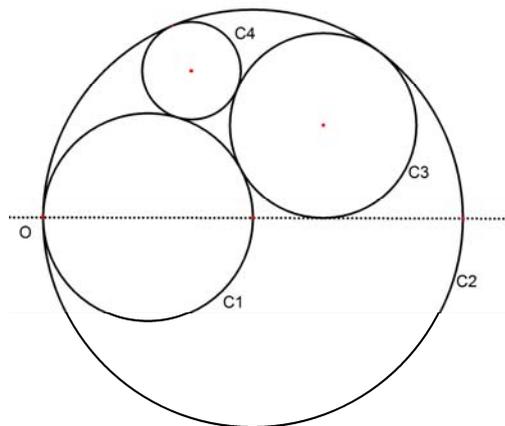
2. 在 \mathbb{R}^3 中, $|\overrightarrow{AB}| = 5, \frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{4}{3}$. 求

a. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ 的最大值與最小值。

b. $|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}|$ 的最大值。

3. 求 $f(t) = \frac{\sqrt{1-t^2}}{2+t+\sqrt{1-t^2}}, -1 \leq t \leq 1$, 的最大值與最小值。

4. 如右圖, 兩圓 C_1, C_2 的半徑分別為 1, 2. C_1 內切 C_2 於點 O . 圓 C_3 分別與 C_1, C_2 相切, 且與過兩圓圓心的直徑相切; 圓 C_4 與 C_1, C_2, C_3 相切。求 C_3, C_4 的半徑。



5. 在一個 4×4 棋盤格子上填入數字 1, 2, 3, 4, 且要求每一列、每一行

裏 1, 2, 3, 4 剛好各出現一次, 如:

3	1	2	4
2	3	4	1
4	2	1	3
1	4	3	2

a. 求所有可能填入的方法總數。

b. 若再進一步要求每一條對角線上的數字也是剛好各出現一次, 這樣方法總數又是多少?