

國立彰化師範大學數學系 105 學年度大學甄選

個人申請入學第二階段指定項目甄試考試

第一試

※填充題：(請將答案依題號填入答案卷的空格內)。每一題分數為 10 分。

符號定義：若 x 為實數，則 $[x]$ 表示小於或等於 x 之最大整數

1. 求 $m^2 + 49^2 = n^2$ 的所有正整數解 (m, n) 。
2. $\triangle ABD$ 的 \overline{BD} 邊上有一點 C ，使得 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD} = 6:4:5$ ，求 $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$ 之值。
3. 設二次實係數多項式 $P(x)$ 的二次項係數為 1。已知 $P(x^{105} + 2)$ 除以 $x^2 - 1$ 的餘式為 $2x - 1$ ，求 $P(x)$ 。
4. 求最小正整數 m 使得不等式 $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + \cdots + [\sqrt{m}] \geq 1000$ 成立。
5. 已知方程式 $[\log_2 x] = \log_2 [x]$ 的解集合在數線上是由某些不相交區間組成，若 $1 \leq x \leq 2015$ ，則這些不相交區間的長度總和為何？
6. 若函數 $f(x) = 3\sin x - 4\cos x$ 在 $x = \theta$ 時有最小值，求 $\tan \theta$ 之值。
7. 設 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 。若 $A^{100} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ，求 a 之十位數。
8. 一咖啡店某一天舉行優惠活動，每位客人至少要購買一杯，最多可購買四杯咖啡。當天活動結束後，共有 240 位客人，總共賣出 596 杯咖啡，每位客人購買杯數的中位數為 2，那麼購買 4 杯咖啡的客人人數最多可能為多少？
9. 設甲袋中有 4 個紅球及 2 個黑球，乙袋為空袋。自甲袋任取兩球放入乙袋，再自乙袋任取一球放回甲袋，此即完成一次試驗。執行此試驗兩次後，求乙袋恰有 1 個黑球的機率。(小叮嚀：第一次試驗後，甲袋剩下 5 顆球，乙袋中有 1 顆球，所以，第二次試驗開始時，甲袋有 5 顆球，乙袋中有 1 顆球)。
10. 設 $P(2, -3, 4)$ 為空間中一點，對於每個實數 k ，考慮 P 點與空間中直線 $L_k: \frac{x-k}{2014} = \frac{y-k}{2015} = \frac{z-k}{2016}$ 的距離 d_k ，求所有的 d_k 之最小值。

國立彰化師範大學數學系 105 學年度大學甄選
個人申請入學第二階段指定項目甄試考試

第二試

注意事項：請將完整的計算證明步驟依題號寫在答案卷上。每一題分數為 20 分。

1. 設數列 a_0, a_1, a_2, \dots 滿足 $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \frac{1+a_n}{2+a_n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. 證明：

$$a_n < a_{n+1}, n = 0, 1, 2, \dots$$

2. 在所有滿足兩條對角線長均為 15 的凸四邊形中，有一些四邊形的面積在當中最大(也就是說，有一些四邊形的面積大於或等於所有兩條對角線長均為 15 的四邊形面積)，請問在所有具有此最大面積之性質的四邊形中，它們周長的最小值是多少？

3. 已知方程式 $2x^3 + 3x^2 - 12x + k = 0$ 有兩相異負根及一正根，求 k 的範圍。

4. 設 $A = \begin{pmatrix} 0 & \cos 45^\circ + i \sin 45^\circ \\ \cos 30^\circ + i \sin 30^\circ & 0 \end{pmatrix}$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ ，若

$$A + A^2 + A^3 + \dots + A^{95} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}，求 a。$$

5. 求二個正數 a, b 使得函數 $f(x) = -\sin^2 x + 2a \sin x + b$ 有最大值 8，最小值 2。